

**EDHEC 2006 : option ES**  
**Corrigé de l'épreuve de mathématiques**

**Exercice 1**

1) a) On résout  $AX = 0$  avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , où  $X$  est la colonne des coordonnées d'un vecteur

quelconque de  $\text{Ker}f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Ce système s'écrit : 
$$\begin{cases} 2x + 10y + 7z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ -2x - 8y - 6z = 0 \end{cases} .$$

Avec les transformations  $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ , on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} 2x + 10y + 7z = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$
 qui, en remplaçant  $z$  par  $-2y$  dans la première équation, est équivalent à :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ z = -2y \end{cases}$$
, soit finalement : 
$$\begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \end{cases} .$$

En conclusion,  $AX = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Ceci montre que  $\text{Ker}f = \text{vect}((2, 1, -2))$ , ce qui s'écrit aussi :

$$\boxed{\text{Ker}f = \text{vect}(u)} .$$

b)  $\text{Ker}f$  est différent de  $\{(0, 0, 0)\}$  donc  $f$  n'est pas injectif, a fortiori pas bijectif. On en conclut que :

$$\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$$

Remarque : on pouvait aussi écrire que le système  $AX = 0$  a d'autres solutions que  $X = 0$ , ce qui prouve que  $A$  n'est pas inversible.

2) a) On pose  $v = (x, 1, z)$ . L'équation  $f(v) = u$  est équivalente au système :  $A \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Ce système s'écrit :  $\begin{cases} 2x + 10 + 7z = 2 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ -2x - 8 - 6z = -2 \end{cases}$ . Les deux dernières équations étant équivalentes, il reste  $\begin{cases} 2x + 7z + 8 = 0 \\ x = -3z - 3 \end{cases}$ , soit  $\begin{cases} z + 2 = 0 \\ x = -3z - 3 \end{cases}$  et enfin  $z = -2$  et  $x = 3$ .

Le vecteur  $v$  cherché vérifiant  $f(v) = u$  est  $v = (3, 1, -2)$

b) L'énoncé semblant admettre que le vecteur  $w$  proposé, solution de  $f(w) = v$ , existe et est unique, on se contente de vérifier par un simple calcul :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Ceci montre bien que :}$$

Le vecteur  $w$  cherché vérifiant  $f(w) = v$  est  $w = (0, 1, -1)$ .

b) Il suffit de montrer que la matrice de passage  $P$  de la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  à la famille  $(u, v, w)$  est inversible.

On cherche donc une réduite de Gauss de la matrice  $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Avec les transformations élémentaires  $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avec la transformation  $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette réduite de  $P$  est triangulaire sans élément diagonal nul, elle est donc inversible et  $P$  l'est aussi. En conséquence :

$\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

3) a) On a :  $f(u) = 0, f(v) = u$  et  $f(w) = v$  donc la matrice  $N$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $N$  est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.  
 On peut donc conclure que 0 est la seule valeur propre de  $N$ , donc la seule valeur propre de  $f$ .  
 De plus, le sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre 0 est  $\text{Ker}f$ .  
 Comme  $\dim \text{Ker}f = 1$ , on a  $\dim \text{Ker}f < \dim \mathbb{R}^3$  donc :

$f^n$  est pas diagonalisable.

**b)** La formule de changement de base s'écrit :  $A = PNP^{-1}$ .

Un calcul simple montre que :  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $N^3 = 0$ .

On en déduit que  $A^3 = 0$ . Pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 3, on a alors :  $A^k = A^3 A^{k-3} = 0$ .  
 Conclusion :

$\forall k \geq 3, A^k = 0$ .

**4) a)** Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  une matrice quelconque de  $C_N$ .

La relation  $MN = NM$  équivaut à :  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ , d'où :

$M \in C_N \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , d'où, en identifiant :  $\begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{cases}$ .

On a donc :  $M \in C_N \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ .

En conclusion :  $M \in C_N \Leftrightarrow M = aI + bN + cN^2$ .  
 Ceci prouve que :

$C_N = \text{vect}(I, N, N^2)$

**b)**  $M \in C_A \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow (PNP^{-1})M = M(PNP^{-1}) \Leftrightarrow PNP^{-1}M = MPNP^{-1}$ .  
 En multipliant les deux membres par  $P^{-1}$  à gauche et par  $P$  à droite, on obtient :  
 $M \in C_A \Leftrightarrow NP^{-1}MP = P^{-1}MPN \Leftrightarrow N(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)N$ .  
 On a donc :

$M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$ .

D'après le résultat de la question 4a), on peut écrire :

$M \in C_A \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, P^{-1}MP = aI + bN + cN^2$ .

Ceci est équivalent (en multipliant les deux membres par  $P$  à gauche et par  $P^{-1}$  à droite) à :

$M \in C_A \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = P(aI + bN + cN^2)P^{-1}$ , d'où, en développant :

$M \in C_A \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = aPIP^{-1} + bPNP^{-1} + cPN^2P^{-1}$ .

Comme  $PIP^{-1} = I$ ,  $PNP^{-1} = A$  et  $PN^2P^{-1} = A^2$ , on trouve finalement :  
 $M \in C_A \Leftrightarrow \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = aI + bA + cA^2$ .

Conclusion :

$$C_A = \text{vect}(I, A, A^2).$$

La famille  $(I, A, A^2)$  est génératrice de  $C_A$ , on va vérifier que c'est une famille libre.

Soit donc trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $aI + bA + cA^2 = 0$ .

En multipliant les deux membres par  $P^{-1}$  à gauche et par  $P$  à droite, on obtient (avec une technique identique à celle utilisée plus haut) :  $aI + bN + cN^2 = 0$ .

$$\text{Ceci s'écrit : } \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et on conclut que : } a = b = c = 0.$$

La famille  $(I, A, A^2)$  est génératrice de  $C_A$  et libre, c'est donc une base de  $C_A$ .

On a donc :

$$\dim C_A = 3.$$

## Exercice 2

1) • Sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $[1, +\infty[$ ,  $f$  coïncide avec la fonction nulle donc elle est positive.

Sur  $[0, \frac{1}{2}[$ ,  $f$  est bien définie ( $1-x \neq 0$ ) et positive (car  $2(1-x)^2 > 0$ ).

Sur  $[\frac{1}{2}, 1[$ ,  $f$  est bien définie ( $x \neq 0$ ) et positive (car  $2x^2 > 0$ ).

$$f \text{ est positive sur } \mathbb{R}.$$

• Sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $[1, +\infty[$ ,  $f$  coïncide avec la fonction nulle donc elle est continue.

Sur  $[0, \frac{1}{2}[$ ,  $f$  est un quotient de fonctions polynomiales à dénominateur non nul donc  $f$  est continue.

Sur  $[\frac{1}{2}, 1[$ ,  $f$  est un quotient de fonctions polynomiales à dénominateur non nul donc  $f$  est continue.

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf peut-être en } 0, \text{ en } \frac{1}{2} \text{ et en } 1.$$

$$\bullet \int_{-\infty}^0 f(t) dt = \int_1^{+\infty} f(t) dt = 0 \text{ (aucun problème de convergence).}$$

$$\bullet \int_0^{1/2} f(t) dt = \left[ \frac{1}{2(1-t)} \right]_0^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet \int_{1/2}^1 f(t) dt = \left[ \frac{-1}{2t} \right]_{1/2}^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Avec la relation de Chasles, on a bien :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \text{ converge et vaut } 1.$$

Les trois points précédents prouvent que  $f$  est une densité de probabilité.

$$2) \bullet \forall x < 0, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt.$$

$$\forall x < 0, F(x) = 0.$$

$$\bullet \forall x \in [0, \frac{1}{2}[, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$F(x) = 0 + \int_0^x \frac{1}{2(1-t)^2} dt.$$

$$F(x) = \left[ \frac{1}{2(1-t)} \right]_0^x$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right)$$

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}[, F(x) = \frac{x}{2(1-x)}.$$

$$\bullet \forall x \in [\frac{1}{2}, 1[, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{1/2} f(t) dt + \int_{1/2}^x f(t) dt.$$

$$F(x) = 0 + \frac{1}{2} + \int_{1/2}^x \frac{1}{2t^2} dt$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \left[ \frac{-1}{2t} \right]_{1/2}^x$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \left( -\frac{1}{2x} + 1 \right)$$

$$\forall x \in [\frac{1}{2}, 1[, F(x) = \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{1}{x} \right).$$

$$\bullet \forall x \in [1, +\infty[, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{1/2} f(t) dt + \int_{1/2}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt$$

$$F(x) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0$$

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, F(x) = 1.}$$

$$3) \bullet \int_{-\infty}^0 t f(t) dt = \int_1^{+\infty} t f(t) dt = 0 \text{ (aucun problème de convergence).}$$

$$\bullet \int_0^{1/2} t f(t) dt = \int_0^{1/2} \frac{t}{2(1-t)^2} dt = \int_0^{1/2} \frac{t-1+1}{2(1-t)^2} dt = \int_0^{1/2} \left( \frac{-1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1-t)^2} \right) dt.$$

$$\int_0^{1/2} t f(t) dt = \left[ \frac{1}{2} \ln|1-t| \right]_0^{1/2} - \left[ \frac{1}{2(1-t)} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2).$$

$$\bullet \int_{1/2}^1 t f(t) dt = \int_{1/2}^1 \frac{1}{2t} dt = \left[ \frac{1}{2} \ln t \right]_{1/2}^1 = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2}{2}.$$

D'après la relation de Chasles,  $X$  a une espérance qui vaut :

$$E(X) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) + \frac{\ln 2}{2}, \text{ d'où :}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{2}.}$$

$$4) \text{ a) } \bullet \int_{-\infty}^0 (t-1)^2 f(t) dt = \int_1^{+\infty} (t-1)^2 f(t) dt = 0 \text{ (aucun problème de convergence).}$$

$$\bullet \int_0^{1/2} (t-1)^2 f(t) dt = \int_0^{1/2} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4}.$$

$$\bullet \int_{1/2}^1 (t-1)^2 f(t) dt = \int_{1/2}^1 \frac{t^2 - 2t + 1}{2t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 \left( 1 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt.$$

$$\int_{1/2}^1 (t-1)^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \left[ t - 2 \ln|t| - \frac{1}{t} \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{2} \left( (1 - 2 \ln 1 - 1) - \left( \frac{1}{2} - 2 \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \right) \right).$$

$$\int_{1/2}^1 (t-1)^2 f(t) dt = -\frac{1}{2} \left( -\frac{3}{2} + 2 \ln 2 \right) = \frac{3}{4} - \ln 2.$$

Toujours avec la relation de Chasles,  $(X-1)^2$  a une espérance et :

$$\boxed{E((X-1)^2) = 1 - \ln 2.}$$

**b)** Comme  $X^2 = (X-1)^2 + 2X - 1$ , on déduit de la question précédente que  $E(X^2)$  existe.

Par linéarité de l'espérance :  $E(X^2) = E((X-1)^2) + 2E(X) - 1$ .

Par conséquent,  $E(X^2) = 1 - \ln 2 + 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 - \ln 2$ .

Comme  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ , on a finalement :

$$V(X) = 1 - \ln 2 - \frac{1}{4}, \text{ soit :}$$

$$V(X) = \frac{3}{4} - \ln 2.$$

5) a) On remarque que :

$$(Y = 1) = (X \leq \frac{1}{2}) = (Z = 0) \text{ et } (Z = 1) = (X > \frac{1}{2}) = (Y = 0).$$

Or, pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ ,

$$\text{soit } (X(\omega) \leq \frac{1}{2}) \text{ et on a } Y(\omega) + Z(\omega) = 1,$$

$$\text{soit } (X(\omega) > \frac{1}{2}) \text{ et on a encore } Y(\omega) + Z(\omega) = 1.$$

En conclusion :

$$Y + Z = 1.$$

Les variables  $Y$  et  $Z$  sont donc affinement liées, ce qui prouve que  $\rho(Y, Z) \in \{-1, 1\}$ .  
De plus,  $Z = -Y + 1$ , donc  $Z$  est une fonction décroissante de  $Y$  et on a donc :

$$\rho(Y, Z) = -1.$$

b) On sait que  $\text{cov}(Y, Z) = \rho(Y, Z) \sqrt{V(Y)} \sqrt{V(Z)}$ .

$$Y \text{ suit la loi de Bernoulli dont le paramètre est } P(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

$$Z \text{ suit la loi de Bernoulli dont le paramètre est } P(X > \frac{1}{2}) = 1 - F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

On a donc  $V(Y) = V(Z) = \frac{1}{4}$ , ce qui donne :

$$\text{cov}(Y, Z) = -\frac{1}{4}.$$

### Exercice 3

Tout d'abord,  $f$  est une fonction polynomiale donc elle est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

1) a) Les dérivées partielles premières de  $f$  sont :

$$f'_x(x, y) = 4x + 2y - 1.$$

$$f'_y(x, y) = 2x + 4y - 1.$$

b) Les points critiques de  $f$  sont les points en lesquels les deux dérivées premières s'annulent simultanément, ce sont donc les solutions du système :

$$\begin{cases} 4x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

Avec la transformation élémentaire  $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ , on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} 4x + 2y - 1 = 0 \\ 6y - 1 = 0 \end{cases}. \text{ On en déduit que :}$$

La fonction  $f$  admet un seul point critique :  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ .

2) a) Les dérivées partielles secondes de  $f$  sont :

$$f''_{x^2}(x,y) = 4.$$

$$f''_{xy}(x,y) = 2.$$

$$f''_{yx}(x,y) = 2.$$

$$f''_{y^2}(x,y) = 4.$$

b) Avec les notations de Monge, on a :  $r = 4, s = 2$  et  $t = 4$ .

On en déduit que  $rt - s^2 = 12 > 0$  donc  $f$  admet un extremum local en  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ .

Comme de plus,  $r > 0$ , cet extremum est un minimum local.

Ce minimum vaut  $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$ .

En conclusion :

$f$  admet un minimum local au point  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$  et ce minimum est  $m = -\frac{1}{6}$ .

3) a)  $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2 = 2(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{16} + xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}) + \frac{3}{2}(y^2 + \frac{1}{36} - \frac{y}{3})$ .

Après réduction, on trouve :  $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y + \frac{1}{6}$ .

Et enfin :

$$2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2 = f(x,y) + \frac{1}{6}.$$

b) Pour tout  $(x,y)$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2 \geq 0$  (somme de deux nombres positifs), ce qui s'écrit d'après la question précédente :  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) + \frac{1}{6} \geq 0$ .

On a donc :  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq -\frac{1}{6}$ .

Ceci prouve que :

$-\frac{1}{6}$  est le minimum global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

4) a) En remplaçant  $x$  par  $e^x$  et  $y$  par  $e^y$  dans l'expression que l'on a développée à la question 3a), on trouve :  $2\left(e^x + \frac{e^y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(e^y - \frac{1}{6}\right)^2 = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y + \frac{1}{6}$ .

On en déduit que  $g(x,y) + \frac{1}{6} = 2\left(e^x + \frac{e^y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(e^y - \frac{1}{6}\right)^2$ , d'où l'on conclut que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) \geq -\frac{1}{6}.$$

b) De plus,  $g(x,y) = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + \frac{e^y}{2} - \frac{1}{4} = 0 \\ e^y - \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e^y = e^x = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = y = -\ln 6.$

$g$  admet un minimum global égal à  $-\frac{1}{6}$  et ce minimum est atteint au point  $(-\ln 6, -\ln 6)$ .

## Problème

### Partie 1

1) Par définition,  $q = 1 - p = 1 - P(X = 0)$  donc, puisque  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $q = P(X \geq 1)$ .

D'après l'énoncé,  $P(X \geq 1) > 0$  donc  $q > 0$ .

D'autre part, on sait que  $p > 0$  donc  $1 - p < 1$ , c'est-à-dire  $q < 1$ .

En conclusion :

$$0 < q < 1.$$

2) Par hypothèse :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P_{(X \geq m)}(X \geq n+m) = P(X \geq n)$ .

La formule des probabilités composées donne alors :  $\frac{P(X \geq m \cap X \geq n+m)}{P(X \geq m)} = P(X \geq n)$ .

Comme  $n \geq 0$ , on a  $n+m \geq m$  donc  $(X \geq n+m) \subset (X \geq m)$ .

On en déduit alors  $(X \geq n+m) \cap (X \geq m) = (X \geq n+m)$ .

On obtient donc :  $\frac{P(X \geq n+m)}{P(X \geq m)} = P(X \geq n)$ , ce qui s'écrit :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P(X \geq n+m) = P(X \geq m)P(X \geq n).$$

3) a) En écrivant la formule précédente pour  $m = 1$ , on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, P(X \geq n+1) = P(X \geq 1)P(X \geq n)$ , soit :  $u_{n+1} = qu_n$ .

La suite  $(u_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $q$ .

b) Comme  $X$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $u_0 = P(X \geq 0) = 1$ .

D'après le cours sur les suites géométriques, on a donc :  $u_n = q^n$ .

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X \geq n) = q^n.$$

c) Par définition du symbole " $\geq$ ", on a :  $(X \geq n) = (X = n) \cup (X > n)$ .

Comme  $X$  prend des valeurs entières,  $(X > n) = (X \geq n + 1)$  et on en déduit :  
 $(X \geq n) = (X = n) \cup (X \geq n + 1)$ .

Par incompatibilité des événements  $(X = n)$  et  $(X \geq n + 1)$ , on a :  
 $P(X \geq n) = P(X = n) + P(X \geq n + 1)$ , ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n + 1).$$

**d)** D'après 3b) et 3c), on peut écrire :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = q^n - q^{n+1}$ .  
 On trouve donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = q^n p.$$

**4) a)**  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  donc  $(X + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .  
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X + 1 = n) = P(X = n - 1) = q^{n-1} p$ .  
 On en déduit que :

$X + 1$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .

**b)** D'après le cours,  $E(X + 1) = \frac{1}{p}$  et  $V(X + 1) = \frac{q}{p^2}$ .

On sait que :  $E(aX + b) = aE(X) + b$  et  $V(aX + b) = a^2V(X)$  donc :  
 $E(X) + 1 = \frac{1}{p}$  et  $V(X) = \frac{q}{p^2}$ , ce qui donne enfin :

$$E(X) = \frac{q}{p} \text{ et } V(X) = \frac{q}{p^2}.$$

## Partie 2

**1) a)**

Notions dans un premier temps que  $\lambda_n$  est bien défini puisque  $P(Y \geq n) > 0$ .

D'après la formule des probabilités composées,  $\lambda_n = \frac{P([Y = n] \cap [Y \geq n])}{P(Y \geq n)}$ .

Comme  $(Y = n) \subset (Y \geq n)$ , on a :  $(Y = n) \cap (Y \geq n) = (Y = n)$  et il en résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}.$$

**b)**  $1 - \lambda_n = 1 - \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{P(Y \geq n) - P(Y = n)}{P(Y \geq n)}$ .

D'après le résultat de la question I3c), on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \frac{P(Y \geq n + 1)}{P(Y \geq n)}.$$

**c)**  $(Y \geq n + 1) \subset (Y \geq n)$  donc  $P(Y \geq n + 1) \leq P(Y \geq n)$ .

En divisant par  $P(Y \geq n) > 0$ , on obtient  $\frac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)} \leq 1$ , c'est-à-dire  $1 - \lambda_n \leq 1$ .

On en déduit alors :  $\lambda_n \geq 0$ .

D'autre part, on sait par hypothèse que  $P(Y \geq n+1) > 0$  et  $P(Y \geq n) > 0$ .

Par conséquent,  $1 - \lambda_n > 0$ , d'où :  $\lambda_n < 1$ .

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda_n < 1.}$$

**d) •** Pour  $n = 1$ ,  $\prod_{k=0}^{1-1} (1 - \lambda_k) = \prod_{k=0}^0 (1 - \lambda_k) = 1 - \lambda_0$ .

Or  $1 - \lambda_0 = \frac{P(Y \geq 1)}{P(Y \geq 0)}$  et, comme  $Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $P(Y \geq 0) = 1$ .

On a donc :  $1 - \lambda_0 = P(Y \geq 1)$ .

Pour finir :  $\prod_{k=0}^{1-1} (1 - \lambda_k) = P(Y \geq 1)$ .

• Supposons, pour un entier  $n$  fixé supérieur ou égal à 1, que  $\prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k) = P(Y \geq n)$ .

On a alors, d'après 1b),  $P(Y \geq n+1) = (1 - \lambda_n) P(Y \geq n)$ , ce qui, grâce à l'hypothèse de

réurrence, donne :  $P(Y \geq n+1) = (1 - \lambda_n) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$ , d'où :  $P(Y \geq n+1) = \prod_{k=0}^n (1 - \lambda_k)$ .

On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k).}$$

**2) a)**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} (Y = k)\right) = P(Y \leq n-1)$ .

Comme  $Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $(Y \leq n-1) = \overline{(Y \geq n)}$ , donc :  $P(Y \leq n-1) = 1 - P(Y \geq n)$ .

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geq n).}$$

**b)**  $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements donc  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1$ .

Ceci signifie exactement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1$ .

D'après le résultat de la question 2a), on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y \geq n) = 0.}$$

c) Comme  $P(Y \geq n) > 0$ , on peut prendre le logarithme népérien dans l'égalité obtenue à la question 1d), ce qui donne :  $\ln(P(Y \geq n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \lambda_k)$ .

On a donc  $-\ln(P(Y \geq n)) = \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1 - \lambda_k)$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y \geq n) = 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(P(Y \geq n)) = +\infty$ , ce qui donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1 - \lambda_k) = +\infty.$$

d) D'après la question précédente, la série de terme général  $-\ln(1 - \lambda_k)$  est divergente et à termes positifs (en effet  $\lambda_k \in [0, 1[$  donc  $1 - \lambda_k < 1$  et  $\ln(1 - \lambda_k) < 0$ ).

Deux cas se présentent :

- soit  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = 0$  et on a  $-\ln(1 - \lambda_k) \underset{+\infty}{\sim} \lambda_k$ . Dans ce cas, le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs permet de conclure que, comme la série de terme général  $-\ln(1 - \lambda_k)$  est divergente, alors la série de terme général  $\lambda_k$  est divergente.

- soit  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k \neq 0$  ou  $\lambda_k$  n'a pas de limite et dans ce cas la série de terme général  $\lambda_k$  est divergente (son terme général ne tend pas vers 0).

Dans tous les cas :

La série de terme général  $\lambda_n$  diverge.

3) a) La définition récursive de  $n!$  est :  $0! = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n! = n \times (n-1)!$

La déclaration, une fois complétée, est donc :

If  $n = 0$  then  $f := 1$  else  $f := n * f(n-1)$  ;

b) À l'appel de  $g(a, n)$ , la fonction  $g$  renvoie la valeur de  $a^n$ .

c) En fin de boucle, la variable  $s$  contiendra  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ .

Après la boucle, lambda contiendra  $\lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{P(Y = n)}{1 - P(Y \leq n-1)} = \frac{\frac{a^n}{n!} e^{-a}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}}$ .

Program edhec-2006 ;

var  $n, k$  : integer ;

$a, s, \text{lambda}$  : real ;

Begin

  readln( $n$ ) ;  $s := 0$  ;

  For  $k := 0$  to  $n-1$  do  $s := s + g(a, k) * \exp(-a) / f(k)$  ;

$\text{lambda} := (g(a, n) * \exp(-a) / f(n)) / (1 - s)$  ;

  Writeln ( $\text{lambda}$ ) ;

end.

- d)** Les instructions manquantes sont
- dans la boucle :  $s := s + p$  ;
  - Après la boucle :  $s := s * \exp(-a)$  ;

**Partie 3**

1) On sait que :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = q^n p, P(X \geq n) = q^n$  et  $\lambda_n = \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)}$ .

On en déduit donc que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \frac{q^n p}{q^n}$

Après simplification, on trouve :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = p.}$$

2) a) On sait déjà que  $0 \leq \lambda_n < 1$  donc  $0 \leq \lambda < 1$  (puisque  $\lambda_n = \lambda$ ).

Si l'on avait  $\lambda = 0$ , alors on aurait  $0 = \frac{P(Z = n)}{P(Z \geq n)}$ , ce qui donnerait :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z = n) = 0$ .

Ceci contredit le fait que  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = n) = 1$ .

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \lambda < 1.}$$

b) D'après le résultat de la question 1d) de la partie 2 :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Z \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$ .

Comme le taux de panne de  $Z$  est constant et égal à  $\lambda$ , on a :  $P(Z \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda)$ .

On en déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Z \geq n) = (1 - \lambda)^n$ .

$Z$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$  donc  $P(Z \geq 0) = 1 = (1 - \lambda)^0$ , ce qui rend la formule précédente encore valable pour  $n = 0$ .

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geq n) = (1 - \lambda)^n.}$$

c) Comme  $\lambda = \frac{P(Z = n)}{P(Z \geq n)}$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z = n) = \lambda P(Z \geq n)$ .

On déduit alors de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Z = n) = \lambda (1 - \lambda)^n.$$

En posant  $p = \lambda$  (on a bien  $0 < p < 1$ ) et  $q = 1 - p$ , on retrouve :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z = n) = p q^n$ .

Grâce aux questions 1) et 2) de cette partie, les seules variables aléatoires  $Z$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , vérifiant pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $P(Z \geq n) > 0$  et dont le taux de panne est constant, sont les variables dont la loi est du type de celle de  $X$ .